Abidjan **Antananarivo** **Cotonou** **Fianarantsoa** **Limbe** **Ouagadougou** **Yaoundé** **Ziguinchor**

Examen d'entrée au
Master 2 Probabilités, Statistique, et Applications au Vivant
Université Félix Houphouet Boigny & Aix-Marseille Université
Date : 15 Mai 2024. Durée : 3h

Exercice 1: Soit X un vecteur aléatoire de dimension d. Montrez que sa loi $\mathbb{P}_X$ est entièrement déterminée par la donnée des lois de toutes les variables aléatoires réelles $\lambda \cdot X$, où $\lambda \in \mathbb{R}^d$ est tel que $|\lambda| = 1$.

Exercice 2: Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes, toutes de loi de Gauss $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrer que les deux variables aléatoires réelles . $Y = \sum_{j=1}^n a_j X_j$ et $Z = \sum_{j=1}^n b_j X_j$ sont indépendantes si et seulement si $\sum_{j=1}^n a_j b_j = 0$.

Exercice 3: Soit $(X_n, n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre p. On pose pour tout n $Y_n = X_n X_{n+1}$.

1. Quelle est la loi de Y_n ?
2. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+k})$ pour tout n et tout k.
3. Montrer que $\bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_k \overset{\text{Proba}}{\longrightarrow} p^2$. Y-a-t-il convergence presque sûre ?

Exercice 4: Soit X et Y deux variables aléatoires telles que X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, et Y suit une loi exponentielle de paramètre 1. On suppose de plus que la loi de X conditionnelle sachant Y est une loi de Poisson de paramètre Y, i.e

$$\forall k \geq 0,\ \mathbb{P} \text{ p.s.},\ \ \mathbb{P}[X = k | Y] = \exp(-Y) \frac{Y^k}{k!}.$$

Déterminer la loi de X, la loi conditionnelle de Y sachant que $X = k$.

Exercice 5: Convergence en loi et convergence des densités.
Pour tout réel x, on note $x_+ = \max(x, 0)$ et $x_- = \max(-x, 0)$. Soit X et (pour chaque $n \geq 1$) X_n des vecteurs aléatoires à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, qui possèdent les densités f et f_n (par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$).

1. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f_n(x))_+ \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} (f(x) - f_n(x))_- \, dx = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_n(x)| \, dx.$$
2. En déduire que si $f_n(x) \to f(x)$ p. p. , alors $f_n \to f$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, dx)$.
3. Montrer que si $f_n(x) \to f(x)$ p. p., X_n converge en loi vers X, quand $n \to \infty$.

Exercice 6: Soit $\{A_i, i \geq 1\}$ une suite d'évènements telle que $\sum_{k=1}^\infty \mathbb{P}(A_k) = +\infty$. On rappelle la définition de l'évènement $\limsup_n A_n = \cap_{k \geq 1} \cup_{n \geq k} A_n$.

1. Si on suppose que les évènements $\{A_i, i \geq 1\}$ sont indépendants, que vaut $\mathbb{P}(\limsup_n A_n)$? (on ne demande pas la démonstration de ce résultat).
2. On ne suppose plus que les évènements $\{A_i, i \geq 1\}$ sont indépendants, mais on suppose que
$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\left(\sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)\right)^2}{\sum_{1 \leq j,k \leq n} \mathbb{P}(A_j \cap A_k)} = \alpha > 0.$$

(a) On pose $X_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{A_k}$ et $Y_n = X_n/\mathbb{E}[X_n]$. Montrer que l'hypothèse ci-dessus est équivalente à $\limsup_n 1/\mathbb{E}[Y_n^2] = \alpha$.

(b) En notant que $\mathbb{E}\left[Y_n\right] = 1$, montrez que pour tout $\epsilon \in]0,1]$,

$$\mathbb{E}\left[Y_n^2\right] \mathbb{P}(Y_n \geq \epsilon) \geq \left(\mathbb{E}\left[Y_n \mathbf{1}_{\{Y_n \geq \epsilon\}}\right]\right)^2 \geq (1-\epsilon)^2.$$

(c) Montrer que $(\limsup_n A_n)^c \subset \cup_{k\geq 1} \cap_{n\geq k} \{X_n \leq k\}$. En déduire que pour $\epsilon > 0$ arbitraire,

$$\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \geq \mathbb{P}(\limsup_n \{Y_n \geq \epsilon\}) \geq \limsup_n \mathbb{P}(Y_n \geq \epsilon).$$

(d) Déduire des trois questions précédentes que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) \geq \alpha$.

3. Montrez que le résultat de la question 1. se généralise au cas où les évènements $\{A_i, i \geq 1\}$ sont 2 à 2 indépendants.