Examen d'entrée au Master 2 Probabilités, Statistique, et Applications au Vivant Université Félix Houphouet Boigny & Aix-Marseille Université Date : 22 Juin 2022. Durée : 3h

Exercice 1: Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ une suite de variables aléatoires réelles telle que $X_n \to 0$ p. s. quand $n \to \infty$. On suppose en outre que

$$(*) \quad C_2 := \sup_n \mathbb{E}(X_n^2) < \infty.$$

1. Montrer que X_n est intégrable, pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $M > 0$,
$$\mathbb{E}(|X_n|) \leq \mathbb{E}(\min(|X_n|, M)) + \frac{1}{M}\mathbb{E}(X_n^2).$$
3. En déduire que $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{E}(|X_n|) \leq \frac{C_2}{M}$. Conclure que $\mathbb{E}(|X_n|) \to 0$ et $\mathbb{E}(X_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.
4. Montrer que les mêmes résultats sont encore vrais si l'on remplace dans l'hypothèse $(*)$ X_n^2 par $|X_n|^p$, avec un certain $p > 1$.
5. Donner un exemple d'une suite de variables positives qui vérifie $(*)$, mais telle que la variable $X := \sup_{n\geq 1} X_n$ n'est pas intégrable (donc le résultat ne découle pas directement du théorème de convergence dominée).
Indication : on pourra considérer la suite $\{X_n,\ n \geq 3\}$ définie sur $\Omega = [0,1]$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue, par
$$X_n(\omega) = \begin{cases} 0, & si\ 0 \leq \omega < \frac{1}{\sqrt{n}}; \\ \sqrt{n}, & si\ \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \omega \leq \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}; \\ 0, & si\ \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} < \omega \leq 1. \end{cases}$$

Exercice 2: Soient Y_1, Y_2, Z trois variables aléatoires indépendantes. Y_1 et Y_2 sont de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Z prend ses valeurs dans $\{1,2\}$, et $P(Z=1) = p$ $(0 < p < 1)$. On définit

$$T = Y_Z = Y_1\ \mathbb{1}_{Z=1} + Y_2\ \mathbb{1}_{Z=2}\,.$$

1. Montrer que $E(T) = 0$ et que $\mathrm{var}(T) = 1$.
2. Montrer que T est de loi $\mathcal{N}(0,1)$.
3. Montrez que la covariance entre Y_1 et T est $\mathrm{cov}(Y_1, T) = p$.
4. Si le couple (Y_1, T) est un vecteur gaussien, quelle est la loi de la variable $T - Y_1$?
5. Montrer que $P(Y_1 = T) = p$. Le couple (Y_1, T) est-il un vecteur gaussien ?

Exercice 3: Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des v.a.r. i.i.d. intégrables. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Calculer $\mathbb{E}(S_n|X_1)$.
2. Calculer $\mathbb{E}(X_1|S_n)$.
Indication : on montrera d'abord que $\mathbb{E}(X_1|S_n) = \mathbb{E}(X_2|S_n) = \cdots = \mathbb{E}(X_n|S_n)$.

3. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(X_1|X_1+X_2)$ lorsque X_1 et X_2 deux v.a indépendantes, $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1,p)$, $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2,p)$ ($p \in [0;1]; n_1, n_2 \in \mathbb{N}$).

Exercice 4:

Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a.r. i.i.d. telles que $\mathbb{E}(|X_1|) < +\infty$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

1. Si $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, et $\mathbb{E}(X_1) = 0$, que pouvez vous dire de la convergence de $n^{-1/2}S_n$ quand $n \to \infty$?

On ne suppose plus que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, et que $\mathbb{E}(X_1) = 0$. En revanche, on suppose maintenant que $n^{-1/2}S_n$ converge en loi vers une v.a.r. Z p.s. finie, quand $n \to \infty$. Le but des questions qui suivent est de montrer que $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$, et que $\mathbb{E}(X_1) = 0$.

2. Montrer que par l'absurde que $\mathbb{E}(X_1) = 0$.
3. On va maintenant montrer que $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$. On suppose dans cette question que la loi des X_i est symétrique (i.e. X_i et $-X_i$ ont même loi). On pose $U_i = X_i \ \mathbb{1}_{\{|X_i| \leq A\}}$, $V_i = X_i \ \mathbb{1}_{\{|X_i| > A\}}$.
   (a) Montrer que si $\mathbb{E}(X_1^2) = +\infty$, alors $\mathbb{E}(U_1^2) \to \infty$, quand $A \to \infty$.
   (b) Montrer la première inégalité ci–dessous (on admettra provisoirement la seconde), valable pour tout réel K et tout entier n,
   $$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq K\sqrt{n}\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n U_i \geq K\sqrt{n}, \sum_{i=1}^n V_i \geq 0\right) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n U_i \geq K\sqrt{n}\right). \quad (1)$$
   (c) Déduire du théorème central limite appliqué aux variables U_i, que si $\mathbb{E}(X_1^2) = +\infty$, pour tout réel $K > 0$,
   $$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq K\sqrt{n}\right) \geq 1/4\,.$$
   (d) Conclure que $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$.
   (e) Justifier la seconde inégalité (1). On pourra considérer σ, le sous ensemble aléatoire de $\{1, 2, \ldots, n\}$ des indices i tels que $|X_i| > A$.
4. On ne suppose plus que les X_i sont symétriques. Soit $X'_1, X'_2, \ldots$ une seconde suite de v.a.r. i.i.d., globalement indépendante de la première suite, la loi des X'_i étant la même que celle des X_i. On pose $Y_i = X_i - X'_i$, $i \geq 1$.
   (a) Montrer que l'hypothèse de l'exercice entraîne que $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{\mathcal{L}} Z - Z'$, où Z' est indépendante de Z, et de même loi qu'elle, et que les v.a.r. Y_i sont symétriques et i.i.d..
   (b) Déduire de la question 3 que $\mathbb{E}[Y_1^2] < +\infty$, et conclure que $\mathbb{E}[X_1^2] < +\infty$.