**Examen d'entrée au**
**Master 2 Probabilités, Statistique et Applications au Vivant**
**de l'Université Félix Houphouet Boigny**
**11 juin 2015**

**Exercice 1:**

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice de covariance.
2. Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien centré, de matrice de covariance $A$. Les deux v.a.r. $X$ et $Y$ sont–elles indépendantes ? Les deux v.a.r. $X+Y$ et $X-Y$ sont–elles indépendantes ?

**Exercice 2:** Soit $X$ une v.a.r. de loi $N(0,1)$. On pose $Y = \text{sign}(X)$, de telle sorte que $X = Y \times |X|$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}(Y=-1) = 1/2$, que les deux v.a.r. $|X|$ et $Y$ sont indépendantes, et que $\mathbb{E}(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ .
2. Montrer que $\mathbb{E}(X|Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Y$.
3. On se donne $\{X_j,\ j \geq 1\}$ des v.a.r. i.i.d., toutes de loi $N(0,1)$. On pose $Y_j = \text{sign}(X_j)$, $\mathcal{G} = \sigma\{Y_j,\ j \geq 1\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X_j|\mathcal{G}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, Y_j.$$

*Indication : on pourra utiliser le fait que* $\mathcal{G} = \sigma\{Y_j\} \vee \sigma\{Y_\ell,\ \ell \neq j\}$.

**Exercice 3:** Soit $\{U_n,\ n \geq 1\}$ une suite de v.a.r. i.i.d. de loi $\mathcal{U}[0,1]$. On pose, avec $\alpha > 0$,

$$Y_n = e^{\alpha\sqrt{n}}(U_1 \times \cdots \times U_n)^{\alpha/\sqrt{n}}.$$

1. Montrer que $\mathbb{E}(\log U_1) = -1$ et $\text{Var}(\log U_1) = 1$.
2. Etudier la convergence en loi de $\frac{1}{\alpha}\log Y_n$ quand $n \to \infty$.
3. Etudier la convergence en loi de $Y_n$ quand $n \to \infty$.

**Exercice 4:** Soit $X$ une v.a.r. On désigne par $\mathcal{A} = \{x_k,\ k \in K\}$, avec $K$ au plus dénombrable, le sous–ensemble des points de $\mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(X = x_k) > 0$. On note $\mu_k := \mathbb{P}(X = x_k)$. Les points de $\mathcal{A}$ sont donc les atomes de la loi de $X$. Si cette dernière est diffuse (i.e. si $\mathbb{P}(X = x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), alors $\mathcal{A} = \emptyset$ (et aussi $K = \emptyset$). On désignera par $\varphi$ la fonction caractéristique de la v.a.r. $X$, et par $(X_1, X_2)$ un couple de v.a.r. indépendantes telles que $X_1$ et $X_2$ ont toutes deux la même loi que $X$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}(X_1 = X_2) = \sum_{k \in K} \mu_k^2.$$

2. Soit $a \in \mathbb{R}$, $T > 0$. On pose

$$\psi(a,T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-iat}\varphi(t)dt.$$

Montrer que

$$\psi(a,T) = \frac{1}{2T}\mathbb{E}\int_{-T}^{T} e^{it(X-a)}dt,$$

et en déduire que quand $T \to \infty$, $\psi(a,T) \to \mathbb{P}(X = a)$.

3. Montrer que $t \to |\varphi(t)|^2$ est la fonction caractéristique de la v.a.r. $X_1 - X_2$, et déduire de la question 2 que quand $T \to \infty$,

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |\varphi(t)|^2 dt \to \mathbb{P}(X_1 = X_2).$$

En déduire que si $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 dt < \infty$, alors $\mathcal{A} = \emptyset$.

**Exercice 5:** Soit $\{X_j,\ j \geq 1\}$ des v.a.r. i.i.d., toutes de loi $N(0,1)$, et $\{a_j,\ j \geq 1\}$ des nombres réels tels que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 < \infty$. On pose $Y_j = \text{sign}(X_j)$ pour tout $j \geq 1$. On conseille au lecteur de se reporter aux résultats de l'Exercice 2.

1. Montrer que la suite $Z_n = \sum_{j=1}^{n} a_j Y_j$ est de Cauchy dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$. On note $Z$ la limite des $Z_n$ quand $n \to \infty$.
2. Soit $J \subset \mathbb{N}^*$ un ensemble fini, et $p \geq 1$.

   a. Calculer $\mathbb{E}\left(|\sum_{j\in J} a_j X_j|^p\right)$ en fonction de $\sum_{j\in J} a_j^2$ et de $\mathbb{E}(|X_1|^p)$.

   b. En déduire que

$$\mathbb{E}\left(\left|\sum_{j\in J} a_j Y_j\right|^p\right) \leq C_p \left|\sum_{j\in J} a_j^2\right|^{p/2},$$

   avec $C_p = (\pi/2)^{p/2}\mathbb{E}(|X_1|^p)$. *Indication : on utilisera le résultat de la question 3 de l'Exercice 2 et l'inégalité de Jensen pour les espérances conditionnelles.*

   c. Montrer que $Z_n$ converge aussi dans $L^p(\Omega, \mathbb{P})$ vers $Z$, et que (inégalité de Khinchine)

$$\mathbb{E}\left(|Z|^p\right) \leq C_p \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\right|^{p/2}.$$

3. Montrer par un argument analogue que $\mathbb{E}\exp[Z^2] < \infty$ si $\lambda < (\pi \sum_j a_j^2)^{-1}$.
4. Montrer qu'il existe une constante universelle $c > 0$ telle que

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j^2\right)^{1/2} \leq c \sup_{n\geq 1} \mathbb{E}\left(|Z_n|\right).$$

*Indication : On montre d'abord qu'à $n$ fixé, $(\sum_{j=1}^{n} a_j^2)^{1/2} \leq c\mathbb{E}(|Z_n|)$. Pour cela, on remarque que $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = \mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(|Z_n|^{2/3}|Z_n|^{4/3})$, puis on utilise l'inégalité de Hölder et celle de la question 2.b. Enfin on conclut.*