Examen d'entrée au
Master 2 Probabilités, Statistique et Applications au Vivant
de l'Université Félix Houphouet Boigny
Aucun document autorisé
28 juin 2019

Exercice 1 : Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives. On notera $\mathbb{P}_X$ sa loi de probabilité (qui est une probabilité sur $\mathbb{R}$).

1. Pour tout $n \geq 1$, on désigne par $A(n, X)$ l'ensemble des $x \geq 0$ tels que $\mathbb{P}_X(\{x\}) \geq 1/n$. Montrer que le cardinal de toute partie finie de $A(n, X)$ est plus petit ou égal à n. En déduire que $A(n, X)$ est un ensemble fini de cardinal plus petit ou égal à n
2. Montrer que l'ensemble des $x \geq 0$ tels que $\mathbb{P}_X(\{x\}) > 0$ est au plus dénombrable. En déduire que $\int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X \geq x)dx$.
3. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty \int_0^x dy \mathbb{P}_X(dx) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx$.
4. Déduire de la question précédente que si X prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^\infty \mathbb{P}(X > i) = \sum_{i=1}^\infty \mathbb{P}(X \geq i)$. Donner une autre démonstration de ce résultat.

Exercice 2 : Soit X, Y et Z trois variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, toutes les trois de loi $N(0, 1)$ (gaussiennes d'espérance 0 et de variance 1).

1. Montrer que le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ est un vecteur aléatoire gaussien.
2. Montrer que le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X - Y \\ Y - Z \\ Z - X \end{pmatrix}$ est un vecteur aléatoire gaussien, indépendant de la variable aléatoire réele $X + Y + Z$. Indication : on montrera tout d'abord que le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X - Y \\ Y - Z \\ Z - X \\ X + Y + Z \end{pmatrix}$ est un vecteur aléatoire gaussien.
3. En déduire que les deux variables aléatoires réelles $X + Y + Z$ et $(X - Y)^2 + (Y - Z)^2 + (Z - X)^2$ sont indépendantes.

Exercice 3 : Soit X_n et Y_n, $n \geq 1$ des variables aléatoires réelles. On suppose que $X_n \to 0$ en probabilité, et que la suite $\{Y_n\}$ est tendue, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M_\varepsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}(|Y_n| > M_\varepsilon) \leq \varepsilon$, pour tout $n \geq 1$.
Montrer que $X_n Y_n \to 0$ en probabilité.

Exercice 4 : Soit pour tout $\lambda > 0$ X_λ une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose $Y_\lambda = \frac{X_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

1. Calculer les deux premiers moments et la fonction caractéristique de X_λ et de Y_λ.
2. Montrer que Y_λ converge en loi quand $\lambda \to \infty$, et préciser la loi limite.
3. Retrouver le résultat de la question précédente comme conséquence du théorème central limite, lorsque $\lambda \to \infty$ en prenant des valeurs entières ($\lambda = n$).
4. Montrer que
$$e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \to \frac{1}{2}, \qquad \text{quand } n \to \infty\,.$$

Exercice 5 : (Formules de Wald) Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, et $\{X_n,\ n \geq 1\}$ des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à à valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose
$$U = \sum_{n=1}^{N} X_n = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{n \leq N\}} X_n.$$
On suppose en outre que les v.a. $N, X_1, X_2, \ldots$ sont indépendantes.

1. Montrer que si N et X_1 sont intégrables, alors U l'est aussi et en outre $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1]$.
2. On suppose maintenant N et X_1 de carré intégrable. Montrer que U est de carré intégrable et que $\mathrm{Var}\,[U] = \mathbb{E}[N]\mathrm{Var}\,[X_1] + \mathrm{Var}\,[N](\mathbb{E}[X_1])^2$.

Exercice 6 : Soit $T_1, \ldots, T_k$ des variables aléatoires réelles indépendantes à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, la loi de chacune des T_i étant à densité strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ (donc en particulier telles que $\mathbb{P}(T_i > t) > 0$, pour tout $t > 0$). On définit les v. a. $\Lambda = \inf_{1 \leq i \leq k} T_i$, et ξ à valeurs dans $\{1, \ldots, k\}$ par
$$\xi = \inf\{1 \leq j \leq k;\ T_j = \Lambda\}.$$
On suppose que pour $1 \leq i \leq k$, T_i suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_i > 0$. On a donc que pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(T_i > t) = \exp(-\lambda_i t)$, $1 \leq i \leq k$.

1. Montrer que que $\mathbb{P}(\{\xi = i\} \backslash \{T_i < \min_{j \neq i} T_j\}) = 0$.
2. Calculer $\mathbb{P}(\Lambda > t)$. En déduire que la v. a. Λ suit une loi exponentielle de paramètre $\sum_{1 \leq i \leq k} \lambda_i$.
3. Montrer que T_i et $\inf_{j \neq i} T_j$ sont deux v. a. indépendantes, toutes les deux de loi exponentielle dont on précisera les paramètres.
4. Calculer $\mathbb{P}(T_i < \inf_{j \neq i} T_j)$ et $\mathbb{P}(t < T_i < \inf_{j \neq i} T_j)$.
5. Préciser la loi de ξ (on calculera $\mathbb{P}(\xi = i)$, $1 \leq i \leq k$), et montrer que les deux v. a. Λ et ξ sont indépendantes (on montrera – pourquoi est–ce suffisant ? – que pour tout $1 \leq i \leq k$, $t > 0$, les événements $\{\xi = i\}$ et $\{\Lambda > t\}$ sont indépendants).