Abidjan **Douala** **M'bour** **Ziguinchor**

Examen d'entrée au
Master 2 Probabilités, Statistique et Applications au Vivant
de l'Université Félix Houphouet Boigny
12 juin 2017

Exercice 1 : Soit $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ un vecteur aléatoire gaussien centré (i.e. d'espérance nulmle) et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que nécessairement $-1 \leq \gamma \leq 1$. On suppose dorénavant que cette condition est satisfaite.
2. Trouver la valeur a_0 de a qui minimise $\mathbb{E}[(Y - aX)^2]$.
3. Quelle et la loi de X, celle de $Y - a_0X$, celle du vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X \\ Y - a_0X \end{pmatrix}$? Montrer que X et $Y - a_0X$ sont indépendantes.

Exercice 2 : Soit X une v.a.r. de loi $N(0, 1)$. On pose $Y = \text{sign}(X)$, de telle sorte que $X = Y \times |X|$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Y = -1) = 1/2$, que les deux v.a.r. $|X|$ et Y sont indépendantes, et que $\mathbb{E}(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.
2. Montrer que $\mathbb{E}(X|Y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} Y$.

Exercice 3 : Soit X et Y deux v. a. indépendantes, X exponentielle de paramètre λ et Y exponentielle de paramètre μ, avec $\lambda > 0, \mu > 0$. Donc en particulier $\mathbb{P}(X > t) = \exp(-\lambda t)$ et $\mathbb{P}(Y > t) = \exp(-\mu t)$. On pose $U = \text{Min}(X, Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(U > t)$ en fonction de $\mathbb{P}(X > t)$ et de $\mathbb{P}(Y > t)$.
2. Montrer que la v.a. U suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda + \mu$.
3. Comme rappelé ci–dessus, $\mathbb{P}(X > y) = \exp(-\lambda y)$, pour tout $y \geq 0$. Montrer (en utilisant l'indépendance de X et Y) que $\mathbb{P}(X > Y) = \mathbb{E}[\exp(-\lambda Y)]$.
4. Calculer $\mathbb{P}(X > Y)$ en fonction de λ et de μ.

Exercice 4 : Soit X et Y deux variables aléatoires intégrables. On suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ p.s. et $\mathbb{E}[Y|X] = X$ p.s.

1. Montrer que si g est continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}[(X - Y)(g(X) - g(Y))] = 0.$$
2. On suppose maintenant que g, en plus d'être continue et bornée, est strictement croissante. Déduire de la question précédente que $X = Y$ p.s.

Exercice 5 : Soit $\{X_n,\ n \geq 1\}$ des v.a. indépendantes et identiquement distribuées, toutes exponentielles de paramètre 1, donc de loi de densité

$$f(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{x\geq 0}.$$

1. Monter que $f(x)$ est bien une densité de probabilité. Calculer l'espérance et la variance de X_1.
2. On pose $S_n = X_1 + \cdots +_n$. Que peut–on dire de la limite quand $n \to \infty$ de S_n/n ? En quel sens a–t–on cette limite ?
3. Que peut–on dire du comportement quand $n \to \infty$ de $U_n = \sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - 1)$? Montrer que
$$p_n := \mathbb{P}(U_n \in [0,1]) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp^{-v^2/2} dv.$$
4. Calxuler l'espéranec et la variance de S_n. Montrer par récurrence sur n que S_n suit la loi $\Gamma(1,n)$ de densité
$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} \mathbf{1}_{x \geq 0}.$$
5. Montrer que $p_n = \int_n^{n+\sqrt{n}} f_n(x)dx$, puis en posant $v = \frac{x-n}{\sqrt{n}}$, que
$$p_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} \int_0^1 \left(1 + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} \exp(-v\sqrt{n}) dv.$$
6. On note, pour $n \geq 1$ et $0 \leq v \leq 1$, $g_n(v) = \left(1 + \frac{v}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} \exp(-v\sqrt{n})$. Montrer que $g_n(v) \to g(v)$ quand $n \to \infty$, où $g(v) = \exp(-v^2/2)$, et que $\int_0^1 g_n(v)dv \to \int_0^1 g(v)dv$.
7. Déduire des questions précédentes que
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$