Abidjan **Dakar** **St Louis** **Yaoundé** **Ziguinchor**

Examen d'entrée au
Master 2 Probabilités, Statistique et Applications au Vivant
de l'Université Félix Houphouet Boigny
19 avril 2013

Exercice 1 : Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = \int_0^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} \cos(tx)\, dx$

1. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrez que f est de classe C^1.
2. Montrez que f satisfait l'équation $f'(t) = -tf(t)$. En déduire une expression explicite pour f.
3. Soit X une variable de loi $\mathcal{N}(0,1)$ (de densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2})$). Déduire de ce qui précède que $E\left[e^{itX}\right] = \exp(-\frac{t^2}{2})$.

Exercice 2 : Soit X et Y deux v.a.r. intégrables. On suppose que $\mathbb{E}[X|Y] = Y$ et $\mathbb{E}[Y|X] = X$. On veut en conclure que $X = Y$ p.s.

1. On suppose tout d'abord que X et Y sont de carré intégrable. Montrer que
$$\mathbb{E}[(X-Y)^2] = 0,$$
et conclure que $X = Y$ p.s.
2. On se place dans le cas général. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne bornée, alors
$$\mathbb{E}[(X-Y)(g(X) - g(Y))] = 0.$$
Conclure de cette égalité avec g bornée et strictement croissante que $X = Y$ p.s..

Exercice 3 : Soit X et Y deux v. a. indépendantes, toutes deux de loi exponentielle de paramètre λ, c'est à dire que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(Y > x) = \exp(-\lambda x)$. On pose $U = \mathrm{Min}(X,Y)$, $V = \mathrm{Max}(X,Y) - \mathrm{Min}(X,Y)$.

1. Montrer que $\mathbb{P}(\mathrm{Max}(X,Y) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \times \mathbb{P}(Y \leq x)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$ (on exploitera le fait que cette probablité vaut $\mathbb{P}_{(X,Y)}(\Delta)$, si Δ désigne la diagonale de $\mathbb{R}_+^2$ et $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ la loi de probabilité du vecteur aléatoire (X,Y)).
3. Montrer que si $A = \{X < Y\}$, $B = \{Y < X\}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.
4. Montrer que pour tout $x, y > 0$, $\mathbb{P}(x < U, y < V) = 2\mathbb{P}(x < X, X + y < Y)$, et calculer cette quantité.
5. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(U > x)$ et de $\mathbb{P}(V > y)$. Montrer que U et V suivent des lois exponentieles de paramètre resp. 2λ et λ, et que ces deux v. a. sont indépendantes.
6. Justifiez l'affirmation suivante : "la loi de la somme de deux v. a. indépendantes, exponentielles de paramètres resp. λ et 2λ, est la même que la loi du sup de deux v. a. indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètre λ".

Problème : Toutes les v. a. sont définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. Soit Z une v. a. r. telle que $\mathbb{E}(Z^2) < \infty$ et $a \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathrm{Var}(aZ)$ en fonction de $\mathrm{Var}(Z)$.
2. Soit X et Y deux v. a. r. indépendantes et de même loi, avec $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y^2) < \infty$. Montrer que
$$\mathrm{Var}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) = \mathrm{Var}(X).$$

3. On suppose satisfaites les hypothèses de la question 2, et en outre que la loi commune de X et Y est la loi gaussienne $N(0,\sigma^2)$. Montrer que la loi de $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ est aussi la loi $N(0,\sigma^2)$.
4. On se donne maintenant une v. a. r. X telle que $\mathbb{E}(X^2)<\infty$, et telle qu'en outre si Y est indépendante de X et de même loi qu'elle, alors
$$\frac{X+Y}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad X \quad \text{ont même loi.}$$
   a Montrer que $\mathbb{E}(X)=0$.

   b Montrer que si X_1, X_2, X_3 et X_4 sont indépendantes et toutes de même loi que X, alors
$$\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{2} \quad \text{a même loi que} \quad X.$$
   c Montrer que plus généralement pour tout $k\geq 1$,
$$\frac{X_1+\cdots+X_{2^k}}{2^{k/2}} \quad \text{a même loi que} \quad X.$$
   d déduire du Théorème de la Limite Centrale que la loi de X est la loi $N(0,\sigma^2)$, où $\sigma^2=\mathrm{Var}(X)$.
5. Soit X une v. a. r. dont la fonction caractéristique est donnée par (avec $c>0$ fixé)
$$\varphi(u)=\exp(-c|u|),\ u\in\mathbb{R}.$$
   a Montrer que si X et Y sont indépendantes et de même loi, toutes deux admettant φ comme fonction caractéristique, alors $\frac{X+Y}{2}$ a même loi que X.

   b En déduire que $\mathbb{E}(X^2)=+\infty$ (on raisonnera par l'absurde en utilisant la question 2).

NB La loi de la v. a. X de la question 5 est appelée la loi de Cauchy de paramètres c.