Abidjan **St Louis** **Yaoundé**

Examen d'entrée au
Master 2 Probabilités, Statistique et Applications au Vivant
de l'Université Félix Houphouet Boigny
14 février 2014

Exercice 1 : Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes, toutes deux de loi $N(\mu, 1)$ (donc gaussiennes d'espérance μ et de variance 1).

1. Calculer $\mathrm{Var}\,(X+Y)$, $\mathrm{Var}\,(X-Y)$, $\mathrm{Cov}\,(X+Y, X-Y)$.
2. Préciser la loi du v.a. $\begin{pmatrix} X+Y \\ X-Y \end{pmatrix}$.
3. Montrer que les deux v.a.r. $X+Y$ et $X-Y$ sont indépendantes.

Exercice 2 : Soit X et Y deux v. a. indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètre λ, c'est à dire que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(Y > x) = \exp(-\lambda x)$. On pose $U = \mathrm{Min}(X, Y)$, $V = \mathrm{Max}(X, Y) - \mathrm{Min}(X, Y)$.

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Max}(X, Y) \leq x)$ en fonction de $\mathbb{P}(X \leq x)$ et de $\mathbb{P}(Y \leq x)$.
2. Montrer que $\mathbb{P}(X = Y) = 0$.
3. Montrer que si $A = \{X < Y\}$ et $B = \{Y < X\}$, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = 1/2$.
4. Montrer que pour tout $x, y > 0$, $\mathbb{P}(x < U, y < V) = 2\mathbb{P}(x < X, X + y < Y)$, et calculer cette quantité.
5. En déduire les valeurs de $\mathbb{P}(U > x)$ et de $\mathbb{P}(V > y)$. Montrer que U et V suivent des lois exponentielles de paramètre resp. 2λ et λ, et que ces deux v. a. sont indépendantes.
6. Justifiez l'affirmation suivante : "la loi de la somme de deux v. a. indépendantes, exponentielles de paramètres resp. λ et 2λ, est la même que la loi du sup de deux v. a. indépendantes, toutes deux exponentielles de paramètre λ".

Exercice 3 : Soit X et Y deux v. a. r. de carré intégrable, définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{E}(Y|X) = X$.

1. Déduire de l'hypothèse que $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X^2)$ et $\mathbb{E}(Y^2|X) \geq X^2$ p. s.
2. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes
   - (i) $\mathbb{E}(Y^2|X) = X^2$ p. s.
   - (ii) $\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X^2)$.
   - (iii) $Y = X$ p. s.

Problème : *Loi des Grands Nombres et Théorème central limite*
Soit $X_1, X_2, \ldots$ des v.a.r. indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On suppose dans toute la suite de ce problème que

$$(*) \quad n^{-1/2} S_n \text{ converge en loi vers une v.a.r. } Z \text{ p.s. finie, quand } n \to \infty.$$

Le but du problème est de montrer que l'hypothèse $(*)$ entraine que $\mathbb{E}(X_1) = 0$ et $\mathbb{E}(X_1^2) < \infty$.

1. Montrer que l'hypothèse $(*)$ entraîne que $\mathbb{E}(X_1) = 0$. *Indication : On déduira de la loi forte des grands nombres que si $\mathbb{E}(X_1) > 0$ (resp. $\mathbb{E}(X_1) < 0$), alors $n^{-1/2} S_n \to +\infty$ (resp. $\to -\infty$) quand $n \to \infty$.*

2. On va maintenant montrer que $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$, sous l'hypothèse supplémentaire que la loi des X_i est symétrique (i.e. X_i et $-X_i$ ont même loi).

   a On pose $U_i = X_i \mathbf{1}_{\{|X_i| \leq A\}}$, $V_i = X_i \mathbf{1}_{\{|X_i| > A\}}$. Montrer que les U_i sont i.i.d., que $\mathbb{E}[U_1^2] < \infty$, que U_1 et $-U_1$ ont même loi, et que $\mathbb{E}[U_1] = 0$.

   b Montrer que si $\mathbb{E}[(X_1)^2] = +\infty$, alors $\mathbb{E}[U_1^2] \to \infty$, quand $A \to \infty$.

   c Montrer la première inégalité ci–dessous (on admettra provisoirement la seconde).

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \geq K\sqrt{n}\right) \geq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i \geq K\sqrt{n}, \sum_{i=1}^{n} V_i \geq 0\right) \geq \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} U_i \geq K\sqrt{n}\right).$$

   d Montrer que si $\mathbb{E}(X_1^2) = +\infty$, alors pour tout $K > 0$, on peut choisir A assez grand pour que la limite quand $n \to \infty$ du terme de droite de la dernière inégalité soit minorée par $1/5$. *Indication : on appliquera le TCL à la suite des U_i – on pourrait remplacer 1/5 par n'importe quel nombre plus petit que* $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. En déduire une contradiction avec l'hypothèse $(*)$.

   e Justifier la seconde inégalité de la question c. On pourra procéder comme suit. Posons $\xi = \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n U_i \geq K\sqrt{n}\}}$, $\eta = \mathbf{1}_{\{\sum_{i=1}^n V_i \geq 0\}}$, $\sigma=$ le sous ensemble aléatoire de $\{1, 2, \ldots, n\}$ des indices i tels que $|X_i| > A$. On montrera que pour tout $B \subset \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{E}(\xi\eta|\sigma = B) = \mathbb{E}(\xi|\sigma = B)\mathbb{E}(\eta|\sigma = B),$$

   que $\sum_{i=1}^n V_i$ et $-\sum_{i=1}^n V_i$ ont même loi, et que $\mathbb{E}(\eta|\sigma = B) \geq 1/2$. On en déduira que

$$\mathbb{E}(\xi\eta|\sigma) \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}(\xi|\sigma) \text{ p.s.},$$

   et que la même inégalité est vraie avec les espérances.

3. On ne suppose plus que les X_i sont symétriques. Soit $X_1', X_2', \ldots$ une seconde suite de v.a.r. i.i.d., globalement indépendante de la première suite, la loi des X_i' étant la même que celle des X_i. On pose $Y_i = X_i - X_i'$, $i \geq 1$.

   a Montrer que les v.a.r. Y_i sont symétriques et i.i.d, et que l'hypothèse $(*)$ entraîne que $n^{-1/2} \sum_{i=1}^n Y_i \xrightarrow{\mathcal{L}} Z - Z'$, où Z' est indépendante de Z, et de même loi qu'elle.

   b Déduire de la question 2 que $\mathbb{E}[Y_1^2] < \infty$. Conclure que $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$